COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 13 MAI 1844.

PRÉSIDENCE DE M. ÉLIE DE BEAUMONT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

« M. Liouville communique verbalement à l'Académie des remarques relatives, 1° à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques; 2° à un passage du livre des *Principes* où Newton calcule l'action exercée par une sphère sur un point extérieur.

» 1. Pour donner des exemples de fractions continues dont on puisse démontrer en toute rigueur que leur valeur n'est racine d'aucune équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

$a, b, \ldots, g, h$ étant des entiers, il suffit de se rappeler que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p}{q}$ étant deux réduites successives de la fraction continue qui exprime le développement d'une racine incommensurable x de cette équation, le quotient incomplet μ, qui vient après la réduite $\frac{p}{q}$, et sert à former la réduite suivante, finira (cela résulte d'une formule de Lagrange, *voyez* les Mémoires de Berlin, année 1768) par être, pour des valeurs de q très-grandes, constamment inférieur à

$$\pm \frac{df(p, q)}{qf(p, q)\,dp},$$

expression essentiellement positive où l'on suppose

$$f(p,\ q) = q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = ap^n + bp^{n-1}q + \ldots + hq^n.$$

Abstraction faite des signes, on aura dès lors, à plus forte raison,

$$\mu < \frac{df(p,\ q)}{qdp},$$

puisque $f(p,\ q)$ est un entier, égal au moins à l'unité si l'on admet (ce qui est permis) que l'équation $f(x) = 0$ a été débarrassée de tout facteur commensurable; $f(p,\ q) = 0$ donnerait en effet $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Maintenant représentons par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$; l'inégalité ci-dessus deviendra

$$\mu < q^{n-2} f'\left(\frac{p}{q}\right).$$

Or, $f'\left(\frac{p}{q}\right)$ est une quantité finie qui tend vers la limite $f'(x)$, comme $\frac{p}{q}$ vers la limite x. En désignant par A un certain nombre fixe supérieur à cette limite, on sera donc certain d'avoir

$$\mu < \mathrm{A}q^{n-2}.$$

» Ainsi *les quotients incomplets d'une fraction continue représentant la racine x d'une équation algébrique de degré n, à coefficients rationnels, sont assujettis à ne jamais dépasser le produit d'un certain nombre constant par la puissance $(n-2)^{\text{ème}}$ du dénominateur de la réduite précédente.*

» Il suffira de donner aux quotients incomplets μ un mode de formation qui les fasse grandir au delà du terme indiqué, pour obtenir des fractions continues dont la valeur ne pourra satisfaire à aucune équation algébrique proprement dite; cela arrivera, par exemple, si, partant d'un premier quotient incomplèt quelconque, on forme chacun des suivants μ à l'aide de la réduite $\frac{p}{q}$ qui le précède, d'après la loi $\mu = q^q$, ou bien encore d'après la loi $\mu = q^m$, m étant l'indice du rang de μ.

» Au reste la méthode précédente, qui s'est offerte la première, n'est ni la seule ni même la plus simple qu'on puisse employer. Ajoutons qu'il y a aussi des théorèmes analogues pour les séries ordinaires. Nous citerons en particulier la série

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^{1.2}} + \frac{1}{a^{1.2.3}} + \ldots + \frac{1}{a^{1.2.3\ldots m}} + \ldots,$$

a étant un nombre entier.

» 2. Newton a démontré que l'action exercée sur un point extérieur par une sphère recouverte uniformément de molécules matérielles, agissant chacune en raison inverse du carré de la distance, est égale à celle que produiraient les mêmes molécules réunies au centre de la sphère. La méthode synthétique qu'il a suivie est, dans ce cas du moins, tout aussi simple, tout aussi directe, on peut dire tout aussi propre à l'invention, que les méthodes analytiques auxquelles on a eu depuis recours; en la traduisant en calcul, on en déduit un théorème sur une classe d'intégrales, et l'on se trouve conduit à une conséquence assez singulière, c'est qu'elle renferme en quelque sorte implicitement la transformation remarquable par laquelle on réduit une fonction elliptique de module c à une autre de module $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$. Ce rapprochement curieux entre deux théories si différentes sera développé ailleurs avec tous les détails convenables; nous nous bornons ici à l'indiquer. »

« M. Augustin Cauchy présente à l'Académie deux opuscules qu'il vient de publier.

» Le premier opuscule a un rapport manifeste avec les travaux de statistique dont se sont plusieurs fois occupés des membres de l'Académie. Il a pour titre : *Considérations sur les moyens de prévenir les crimes et de réformer les criminels*.

» M. Cauchy explique à quelle occasion cet opuscule a été composé.

» Appelé à faire partie du jury près la cour d'assises du département de la Seine, pour la dernière session de l'année 1843, M. Cauchy avait concouru à la rédaction d'une Note que les jurés adressèrent à M. le Ministre de la Justice. Cette Note était conçue dans les termes suivants :