Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper.

Von ERNST WITT in Göttingen.

Es gilt für das Kreisteilungspolynom: $|\Phi_n(x)|$ ist das Produkt aller Entfernungen des Punktes x von allen primitiven n^{ten} Einheitswurzeln in der Gaußschen Ebene. Für $q = 2, 3, \cdots$ ist daher $|\Phi_n(q)| \geqq q - 1$; das Gleichheitszeichen gilt nur für $n = 1$.

Diese geometrische Herleitung kann man auch leicht durch eine arithmetische ersetzen.

Postulate: Eine endliche Additionsgruppe sei gegeben. Außer der Null sollen alle Elemente eine rechts- und linksdistributive Multiplikationsgruppe bilden.

Bekanntlich folgt hieraus die Kommutativität der Additionsgruppe. WEDDERBURN bewies zuerst den schönen Satz, daß auch die Multiplikationsgruppe abelsch sei. Drei weitere Beweise stammen von WEDDERBURN, DICKSON und ARTIN[1]). Hier wird der Nachweis denkbar einfach ausfallen.

Aus $V\Xi = \Xi V$ und $W\Xi = \Xi W$ folgt $(V-W)\Xi = \Xi(V-W)$. Je nachdem, ob Ξ „ein bestimmtes" oder „jedes" Element bedeutet, schließt man: Der Normalisator von Ξ bzw. das Zentrum bildet mit der Null einen Schiefkörper, der die Elemente $V, W, \cdots$ enthält. Ist das Zentrum Unterkörper in einem Schiefkörper (wie dieses beim Normalisator und bei dem ganzen Schiefkörper zutrifft), so gibt es eine Basis, von der alle übrigen Elemente linear bezüglich des Zentrums abhängen. (Die Null wird dem Sinn gemäß mitgerechnet.)

Die Folge ist: Hat das Zentrum (ohne Null) $q-1$ Elemente, so ist die Ordnung der Multiplikationsgruppe $q^n - 1$; eine Klasse konjugierter Elemente umfaßt $\dfrac{q^n-1}{q^d-1}$ Elemente. Also gilt

$$(q^n - 1) = (q-1) + \sum_{d<n} \frac{q^n-1}{q^d-1}.$$

$q-1$ muß hierbei durch $|\Phi_n(q)|$ teilbar sein, denn alle anderen Glieder sind es. Dazu ist notwendig, daß $n = 1$ ist, d. h., daß das abelsche Zentrum mit der ganzen Multiplikationsgruppe zusammenfällt, Q. E. D.

---

[1]) J. H. MACLAGAN WEDDERBURN, A theorem on finite algebras. Transact. of the Am. Math. Soc., Bd. 6, S. 349. — DICKSON, On finite algebras. Gött. Nachr., 1905, S. 379. — ARTIN, Über einen Satz von Herrn J. H. M. Wedderburn. Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Bd. 5, S. 245.