

où

$$s_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Le théorème général en question est donné par la formule suivante :

$$(3) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{F(a, x_0)}{a^\rho e^{ra}} = \frac{e^r}{\Gamma(r+1)} A_\rho.$$

Donc les propriétés limites de la suite (1) sont en rapport direct avec la nature de la singularité envisagée. Par exemple, dans le cas d'un point critique algébrico-logarithmique, nous pouvons déterminer successivement tous les coefficients des polynômes $P_i(z)$ de même que les degrés ρ_i et r_i des termes successifs, de sorte que nous pouvons caractériser complètement la singularité en question, au moyen de $F(a, x_0)$, c'est-à-dire, en dernière analyse, à l'aide des coefficients a_n de la série de Taylor donnée.

Inversement, si les limites successives (3), pour les différents ρ et r existent (en retranchant toujours le terme déjà calculé) il peut arriver qu'après un nombre fini d'opérations on obtienne une limite finie pour $F(a, x_0) - \Phi(a, x_0)$, où Φ est la somme des termes retranchés. Dans ce cas, pour un nombre fini de passages à la limite on a trouvé la partie principale de la fonction, c'est-à-dire la partie qui devient infinie au point x_0 .

On a ainsi, en particulier, exprimé par les coefficients a_n , les conditions nécessaires et suffisantes (en nombre fini) pour qu'en x_0 la partie principale de la fonction soit algébrico-logarithmique (ou polaire).

Remarquons enfin que, pour une fonction analytique écrite sous la forme (2), donc sans que notre théorème cesse d'être applicable, le point x_0 peut être situé même sur une ligne singulière.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur les opérations fonctionnelles linéaires.

Note de M. FRÉDÉRIC RIESZ, présentée par M. Émile Picard.

Pour définir ce qu'on entend par opération linéaire, il faut d'abord préciser le *champ fonctionnel*. Nous considérons la totalité Ω des fonctions réelles et continues entre deux nombres fixes, par exemple entre 0 et 1; pour cette classe, nous définissons la *fonction limite* par l'hypothèse de la convergence uniforme. L'opération fonctionnelle $A[f(x)]$, faisant correspondre à chaque élément de Ω un nombre réel déterminé, sera dite *continue*, si $f(x)$ étant limite des $f_i(x)$, $A(f_i)$ tend vers $A(f)$. Une opération distributive et continue est dite *linéaire*. On montre aisément qu'une telle opé-

ration est aussi bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante M_A telle que pour chaque élément $f(x)$ l'on ait

$$(1) \quad |A[f(x)]| \leq M_A \times \max. |f(x)|.$$

M. Hadamard avait démontré le fait remarquable que toute opération linéaire $A[f(x)]$ est de la forme $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 k_n(x) f(x) dx$, les $k_n(x)$ étant des fonctions continues (1). Dans la Note présente, nous allons développer une nouvelle expression analytique de l'opération linéaire, ne contenant qu'une seule fonction génératrice.

Dans ce but, nous considérons l'intégrale généralisée

$$(2) \quad \int_0^1 f(x) d\alpha(x).$$

Rappelons brièvement la signification de cette expression. On y entend la limite de la somme $\sum_i f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)]$, correspondant à une division de l'intervalle $(0, 1)$ en un nombre fini d'intervalles partiels; ξ_i désigne un élément, d'ailleurs quelconque de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) . Le passage à la limite n'est assujéti qu'à la seule condition que la longueur des intervalles partiels tende uniformément vers zéro (1).

Nous n'avons pas besoin de développer les conditions les plus générales pour que l'intégrale (2) ait un sens. Il nous suffit de remarquer que, la fonction $f(x)$ étant supposée être continue, l'intégrale (2) existe pour toute fonction $\alpha(x)$ à variation donnée, continue ou non. En ce cas, on a l'inégalité

$$(3) \quad \left| \int_0^1 f(x) d\alpha(x) \right| \leq \text{maximum de } |f(x)| \times \text{variation totale de } \alpha(x).$$

Après ces préliminaires, étant donnée une opération linéaire $A[f(x)]$, on définira la fonction $A(x)$ par l'égalité $A(\xi) = A[f(x; \xi)]$, où l'on désigne par $f(x; \xi)$ la fonction égale à x pour $0 \leq x \leq \xi$ et à ξ pour $\xi \leq x \leq 1$. Or en appliquant l'inégalité (1) à la fonction continue $f(x)$ définie par les conditions $f(x_i) = 0$; $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \text{sign} [A(x_{i+1}) - A(x_i)]$, $f(x)$ linéaire dans

(1) Sur les opérations fonctionnelles (Comptes rendus, 9 février 1903). Cf. aussi M. FRÉCHET, Sur les opérations linéaires (Transactions American Math. Soc., t. V, 1904, p. 493-499.)

chaque demi-intervalle, nous parvenons à l'inégalité

$$\sum_i \left| \frac{A(x_i) - 2A\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + A(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq \frac{M_A}{2}.$$

Il en résulte que *les nombres dérivés de la fonction $A(x)$ existent et que ces dérivés constituent des fonctions à variation bornée.*

Maintenant nous définissons une fonction $\alpha(x)$ par les conditions suivantes: pour $0 < x < 1$, $-\alpha(x) =$ un de ces nombres dérivés, par exemple le nombre dérivé supérieur de droite; $\alpha(0) = -A[n(x)]$, $n(x)$ désignant la fonction de valeur constante 1; $\alpha(1) = 0$. La fonction $\alpha(x)$ étant à variation bornée, l'intégrale (2) existe pour toute fonction continue $f(x)$. Particulièrement si la fonction continue $f(x)$ se forme d'un nombre fini de traits linéaires, une légère transformation suffit déjà pour voir que l'intégrale (2) est égale à $A[f(x)]$. En remarquant que chaque fonction continue est fonction limite de telles fonctions et en s'appuyant sur l'inégalité (3) on conclut que le même fait subsiste pour toute fonction $f(x)$. On a donc le théorème:

Étant donnée l'opération linéaire $A[f(x)]$, on peut déterminer la fonction à variation bornée $\alpha(x)$, telle que, quelle que soit la fonction continue $f(x)$, on ait

$$A[f(x)] = \int_0^1 f(x) d\alpha(x).$$

Remarquons encore que la propriété exigée dans notre théorème ne détermine pas uniquement la fonction $\alpha(x)$. On se rend compte de la nature de cette indétermination par le théorème suivant: *Pour que l'intégrale (2) s'annule pour chaque élément $f(x)$ de Ω , il faut et il suffit que la fonction à variation bornée $\alpha(x)$ soit constante, sauf peut-être pour un ensemble dénombrable ne contenant pas les points 0, 1.* On peut aussi profiter de cette indétermination pour rendre $\alpha(x)$ telle que sa variation totale soit *la plus petite possible.*

Dans cet ordre d'idées, nous sommes aussi arrivé à résoudre un pro-

(¹) Dans la littérature, cette notion d'intégrale remonte à STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues* (Annales de Toulouse, t. VIII, 1894). M. Jules König voulut bien me communiquer qu'il s'en était servi bien plus tôt dans son cours, mais il ne rédigea sur ce sujet qu'une seule Note, parue en hongrois: *Mathematikai és Tennészettudományi Értesítő*, 1897.

blème bien intéressant, traité déjà, dans des conditions plus spéciales, par M. Haar (*Dissertation*, Göttingen, 1909). Voici notre résultat :

Soient $A_1(f), A_2(f), \dots, A(f)$ des opérations linéaires, et soient $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha(x)$ leurs fonctions génératrices; nous les supposons telles que leur variation totale soit la plus petite possible; de plus, nous supposons $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \dots = \alpha(0) = 0$. Dans ces conditions, afin que pour tout élément $f(x)$ de Ω la suite infinie des $A_n(f)$ tende vers $A(f)$, il faut et il suffit : 1° qu'on ait

$$\int_0^{\xi} \alpha(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} \alpha_n(x) dx \quad (0 < \xi \leq 1), \quad \alpha(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1);$$

2° que les variations totales des fonctions $\alpha_n(x)$ ne dépassent pas toute borne finie.

Grâce à ce théorème, on peut tout à fait caractériser la fonction à deux variables qui intervient dans l'expression analytique de la transformation fonctionnelle linéaire, faisant correspondre, d'une manière distributive et continue, à chaque élément de Ω , un élément déterminé de la même classe ou d'une autre classe analogue. Par le même théorème on voit aisément comment notre expression est liée à celle de M. Hadamard.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur la détermination des intégrales de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

par leurs valeurs le long d'un contour fermé dans le cas des pointes. Note de M. L. LICHTENSTEIN, présentée par M. Émile Picard.

Dans une Note récente (1), j'ai démontré, en poursuivant les idées de MM. D. Hilbert et E. Picard, l'existence d'une solution de l'équation (1), continue avec ses dérivées partielles des deux premiers ordres, à l'intérieur d'une aire limitée par m courbes S_1, \dots, S_m sans points singuliers et prenant des valeurs données au bord, ses valeurs étant fonctions continues de l'arc, sauf en un nombre fini de points, où elles subissent des changements brusques. Je voudrais aujourd'hui considérer le cas d'une aire T à

(1) *Comptes rendus*, 18 octobre 1909.