Mémoire

sur

les équations algébriques

où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième dégré

par

N. H. Abel.

Christiania.
De l'imprimerie de *Groendahl.*
1824.

Démonstration

de l'impossibilité de la résolution générale des équations du cinquième degré.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'a pas y reussi jusqu'à présent. J'ose donc esperer que les géomètres veulent recevoir avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + d - e = o$$

l'équation générale du cinquième dégré et supposons qu'elle est résoluble algébriquement c'est-à-dire qu'on peut exprimer y par une fonction des quantités a b c d et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous cette forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots\ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

m étant un nombre premier et R p p_1 p_2 etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu' à ce qu'on parviendra à des fonctions rationnelles des quantités a b c d et e. On peut aussi supposer qu'il est impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités a b etc. p p_1 p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc:

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots p_{m-1} . R^{\frac{m-1}{m}}$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation proposée on obtiendra en reduisant un résultat de cette forme

$$P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = o$$

$q\ q_1\ q_2$ etc. étant des fonctions rationnelles et entières des quantités $a\ b\ c\ d\ e\ p\ p_1$ etc. et R. Pour que cette équation puisse avoir lieu il faut que $q = o\ q_1 = o\ q_2 = o$ etc. $q_{m-1} = o$

En effet en désignant $R^{\frac{1}{m}}$ par z on aura les deux équations

$$z^m - R = o \text{ et } q + q_1 z + \ldots + q_{m-1} z^{m-1} = o$$

Si maintenant les quantités $q\ q_1$ etc. ne sont pas égales à zéro ces équations ont nécessairement une on plusieurs racines communes. Soit k le nombre de ces racines on sait qu'on peut trouver une équation du dégré k qui a pour racines les k racines mentionnées et dans laquelle touts les coefficiens sont des fonctions rationnelles de $R\ q\ q_1$ et q_{m-1}

Soit

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \ldots + r_k . z^k = o$$

cette équation. Elle a ces racines communes avec l'équation $z^m - R = o$; or toutes les racines de cette équation sont de la forme $\alpha_\mu . z$, α_μ désignant une des racines de l'équation $\alpha_\mu^m - 1 = o$. On aura donc en substituant les équations suivantes

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \ldots + r_k . z^k = o$$

$$r + \alpha r_1 z + \alpha^2 r_2 z^2 + \ldots + \alpha^k r_k . z^k = o$$

$$r + \alpha_{k-2} r_1 z + \alpha_{k-2}^2 r_2 z^2 + \ldots + \alpha_{k-2}^k r_k . z^k = o$$

De ces k équations on peut toujours tirer la valeur de z exprimée par une fonction rationnelle des quantités $r\ r_1\ r_2$ etc. r_k, et comme ces quantités sont elles-mêmes des fonctions rationnelles de $a\ b\ c\ d\ e$ $R\ ..\ p\ p_2$ etc., il en suit que z est aussi une fonction rationnelle de ces dernières quantités; mais cela est contre l'hypothèse; Il faut donc que

$$q = o \quad q_1 = o \text{ etc. } q_{m-1} = o$$

Si maintenant ces équations ont lieu, il est clair que l'équation proposée est satisfaite par toutes les valeurs qu'on obtiendra pour y en donnant à $R^{\frac{1}{m}}$ toutes les valeurs

$$R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \alpha^3 R^{\frac{1}{m}}, \text{etc. } \alpha^{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

α étant une racine de l'équation

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \ldots + \alpha + 1 = o$$

On voit aussi que toutes ces valeurs de y sont différentes; car dans le cas contraire on aurait une équation de la même forme que l'équation $P=o$, et une telle équation conduit comme on vient de voir à un résultat qui ne peut pas avoir lieu. Le nombre m ne peut donc surpasser 5. En désignant donc par y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 les racines de l'équation proposée on aura:

$$y_1 = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

$$y_2 = p + \alpha R^{\frac{1}{m}} + \alpha^2 p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + \alpha^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

$$y_m = p + \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + \alpha . p_{m-1} . R^{\frac{m-1}{m}}$$

De ces équations on tirera sans peine:

$$p = \frac{1}{m}(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)$$

$$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-1} y_2 + \ldots + \alpha y_m)$$

$$p_2 R^{\frac{2}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-2} y_2 + \ldots + \alpha^2 y_m)$$

$$\vdots$$

$$p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha y_2 + \ldots + \alpha^{m-1} y_m)$$

On voit par là que p p_1 etc. p_{m-1} R et $R^{\frac{1}{m}}$ sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Considerons maintenant une quelconque de ces quantités, par exemple R. Soit

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \ldots + S_{n-1} \cdot v^{\frac{n-1}{n}}$$

En traitant cette quantité de la même manière que y on obtiendra un pareil résultat savoir que les quantités $v^{\frac{1}{n}}$, v, S_2 etc. sont des fonctions rationnelles des différentes valeurs de la fonction R; et comme celles-ci sont des fonctions rationnelles de y_1 y_2 etc. les fonctions $v^{\frac{1}{n}} v$ S S_2 etc. le sont de même. En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes les fonctions irrationnelles contenues dans l'expression de y sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. Cela posé, il n'est pas difficile d'achever la démonstration. Considerons d'abord les fonctions irrationuelles de la forme

$$R^{\frac{1}{m}}$$

R étant une fonction rationnelle de a b c d et e Soit $R^{\frac{1}{m}} = r$, r est une fonction rationnelle de y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 et R une fonction symetrique de ces quantités. Maintenant comme il s'agit de la resolution de l'équation générale du cinquième dégré il est clair qu'on peut considerer y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 comme des variables independantes; l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$ doit donc avoir lieu dans cette supposition; On peut donc aussi changer les quantités y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 entre elles dans l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$; or par ce changement $R^{\frac{1}{m}}$ obtient nécessairement m valeurs différentes en remarquant que R est une fonction symetrique; La fonction r doit donc avoir la propriété qu'elle obtient m valeurs différentes en changeant entre elles de toutes les manières possibles les cinq variables qu'elle contient. Or pour cela il faut que $m=5$ ou $m=2$ en remarquant que m est un nombre premier. (Voyez un mémoire de M. Cauchy inséré dans le Journal de l'école polytechnique XVII^e Cahier) Soit d'abord $m=5$; La fonction r a donc cinq valeurs differentes, et peut par consequent être mise sous cette forme:

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4$$

$p\ p_1\ p_2 \ldots\ldots$ étant des fonctions symetriques de $y_1\ y_2$ etc.
Cette équation donne en changeant y_1 en y_2

$$p+p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3+p_4y^4 =$$
$$\alpha p+\alpha p_1y_2+\alpha p_2y_2+\alpha p_3y_3+\alpha p_4y^4$$
$$\text{où } \alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=o$$

mais cette équation ne peut pas avoir lieu; le nombre m doit par consequent être égal à deux. Soit donc

$$R^{\frac{1}{2}}=r$$

r doit avoir deux valeurs différentes et de signe contraire; on aura donc (Voyez le mémoire de M. Cauchy)

$$R^{\frac{1}{2}}=r=v\,.\,(y_1-y_2)\ (y_1-y_3)\ldots\ldots(y_2-y_3)\ldots\ldots(y_4-y_5)=v.S^{\frac{1}{2}}$$

v étant une fonction symetrique.

Considerons maintenant les fonctions irrationelles de la forme

$$\left(p+p_1R^{\frac{1}{\nu}}+p_2R_1^{\frac{1}{\mu}}+\ldots\right)^{\frac{1}{m}}$$

$p\ p_1\ p_2$ etc. $R\ R_1$ etc. étant des fonctions rationnelles de $a\ b\ c\ d$ et e et par consequent des fonctions symetriques de $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ et y_5. Comme on a vu on doit avoir $\nu=\mu=\text{etc.}=2$ $R=v^2.S$ $R_1=v_1^2S$ etc. La fonction précédente peut donc être mise sons la forme

$$(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

Soit

$$r=(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$
$$r_1=(p-p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

on aura en multipliant

$$rr_1=(p^2-p_1^2S)^{\frac{1}{m}}$$

Si maintenant rr_1 n'est pas une fonction symetrique le nombre m doit être egal à deux; mais dans ce cas r aura quatre valeurs différentes ce qui est impossible; il faut donc que rr_1 soit une fonction symetrique. Soit cette fonction$=v$ on aura

$$r+r_1=(p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}+v\,(p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{m}}=z$$

Cette fonction a m valeurs différentes, il faut donc que $m=5$ en remarquant que m est un nombre premier. On aura par consequent

$$z=q+q_1 y+q_2 y^2+q_3 y^3+q_4 y^4=(p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}+v\,(p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{5}}$$

q q_1 q_2 etc. étant des fonctions symetriques de y_1 y_2 y_3 etc. et par consequent des fonctions rationnelles de a b c d et e. En combinant cette équation avec l'équation proposée, on en tirera la valeur de y exprimée par une fonction rationnelle de z a b c d et e; Or une telle fonction est toujours réductible a la forme

$$y=P+R^{\frac{1}{5}}+P_2 R^{\frac{2}{5}}+P_3 R^{\frac{3}{5}}+P_4 R^{\frac{4}{5}}$$

on P R P_2 P_3 et P_4 sont des fonctions de la forme $p+p_1 S^{\frac{1}{2}}$, p p_1 et S étant des fonctions rationnelles de a b c d et e. De cette valeur de y on tire

$$R^{\frac{1}{5}}=\tfrac{1}{5}\,(y_1+\alpha^4 y_2+\alpha^3 y_3+\alpha^2 y_4+\alpha y_5)=(p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}$$

où

$$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$$

Or le premier membre a 120 valeurs différentes et le second membre seulement 10; par consequent y ne peut avoir la forme que nous vénons de trouver; mais nous avons demontré que y doit nécessairement avoir cette forme si l'équation proposée est resoluble, nous concluons donc:

"Il est impossible de resoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième dégré."

Il suit immediatement de ce théorême qu'il est de même impossible de resoudre par des radicaux les équations générales des dégrés supérieurs au cinquième.

Fin.